



Prof. dr hab. Maciej M. Sysło
Wydział Matematyki i Instytut Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
ul. Chopina 12/18; 87-100 Toruń

tel. 0-604515777; syslo@mat.umk.pl; <http://mmsyslo.pl>

Toruń: 14.10.2017 r.

Recenzja

pracy doktorskiej Pani **Anny Pyzary**, *Algorytmizacja jako aktywność i umiejętność matematyczna*

Motto: Dlaczego nauczanie matematyki
chce się obejść bez informatyki

[M.M. Sysło, 2017]

Zofia Krygowska, uznawana w Polsce za największy autorytet w dydaktyce matematyki, w swoim *Zarysie dydaktyki informatyki* z 1977 roku pisała o dydaktycznych korzyściach, które mogą mieć źródło w korzystaniu z umiejętności algorytmizacji w nauczaniu i kształceniu matematycznym. Te korzyści odnoszą się zarówno do nauczycieli jak i uczniów. Pani Anna Pyzara, powołując się na prace Z. Krygowskiej, jak i T. Ramsa z przełomu lat 70' i 80' XX wieku dotyczące wykorzystania algorytmów w dydaktyce matematyki, zainspirowana tą klasyką dydaktyki matematyki, weryfikuje w swojej pracy zalecenia Z. Krygowskiej głównie w odniesieniu do przygotowania przyszłych nauczycieli matematyki. Bada więc ich przygotowanie do korzystania z algorytmizacji w nauczaniu matematyki, a w dalszej perspektywie – jak umiejętność tworzenia algorytmów może wspomagać modelowanie matematyczne.

Praca składa się z dwóch części, Części teoretycznej i Części badawczej. W części teoretycznej można wyróżnić dwa obszary rozważań: algorytmizację w nauczaniu matematyki oraz modelowanie matematyczne, jako typ algorytmizacji. Część badawcza natomiast jest szczegółową relacją z przeprowadzonych badań wśród niewielkiej liczby nauczycieli. Autorka najpierw przeprowadziła badania wstępne, a następnie – badania właściwe. Pracę kończą wnioski, które potwierdzają, iż algorytmizacja w przygotowaniu przyszłych nauczycieli matematyki może pogłębić ich znajomość algorytmiki, jak i przysłużyć się poprawie nauczania matematyki w obszarze modelowania matematycznego.

Uwaga. Z wykształcenia jestem w takim samym stopniu matematykiem, jak i informatykiem. Moje zainteresowania naukowe to głównie matematyka dyskretna, jako matematyczne podstawy informatyki, zaś w ostatnie dekady gros energii merytorycznej i organizacyjnej poświęcam edukacji informatycznej i związkom tej edukacji z innymi edukacjami. Szczególną uwagę kieruję więc ku edukacji matematycznej i jej związkom z edukacją informatyczną. Autorka cytuje wiele moich opinii i propozycji wiążących się z tymi dwoma edukacjami i związkami między nimi. Recenzja nie jest właściwym miejscem, by je wszystkie tutaj przytoczyć, odnoszę się więc tylko do tych, które mają związek z głównym tokiem pracy. Upředzę, nadal uważam, że w nauczanie matematyki w niedostatecznym stopniu korzysta się z powiązań matematyki z informatyką, zarówno w sensie pojęciowym i teoretycznym, jak i zwłaszcza w zakresie zastosowań do modelowania i rozwiązywania rzeczywistych problemów.

Zacznę od pojęć, a przy okazji oceniam niektóre fragmenty pracy i zamieszczam uwagi szczegółowe,

Pojęcie **algorytmu**. Według Z. Krygowskiej (1977): „Algorytmem opracowanym dla pewnej klasy zadań opartym na pewnym danym z góry zbiorze czynności podstawowych będziemy nazywać każdy plan skończonego ciągu czynności wybranych z tego zbioru taki, że wykona-

nie w zaplanowanej kolejności tych czynności przy danych specyfikujących określone zadanie tej klasy prowadzi do rozwiązania tego zadania.” Ta definicja powstała jednak w 1977 roku i przypuszczam, że nie była efektem głębszej dyskusji z informatykami. Można jednak w niej znaleźć „specyfikację” rozwiązywanego zadania, „rozwiązanie zadania”, a „plan” to zapewne kolejne kroki postępowania. I bardzo ważne – jest mowa o „algorytmie dla pewnej klasy zadań”, bo algorytm powinien być również **uniwersalny**, a nie tylko przepisem wykonania konkretnego zadania, który nie przenosi się na inne podobne zadania. Wymienia się także „czynności podstawowe”, co w informatyce odpowiada tak zwanej „przestrzeni algorytmicznej”, a której są konstruowane algorytmy. Generalnie zgoda na taką definicję, chociaż szkoda, że ta bardzo ważna definicja nie powstała jako konsensus między matematykami i informatykami – dlaczego uczniowie mają słyszeć różne definicje tego samego pojęcia na dwóch różnych przedmiotach? Dalej Autorka wymienia cechy algorytmów, jak jednoznaczność, ogólność (to raczej uniwersalność wspomniane powyżej) i efektywność. Tę ostatnią własność jedna mylnie interpretuje. To nie jest „wykonywalność” (str. 19), ale raczej złożoność obliczeniowa – wiadomo, że nie wszystko można policzyć nawet z pomocą komputera w rozsądnym czasie (pomijam tutaj obliczalność). „Wykonywalność” operacji wynika z ich elementarności, ale tutaj matematycy „potykają” się po raz pierwszy i w pracy jest wiele przykładów schematów blokowych algorytmów (rys. 20, 25), w których sprawdza się, czy zachodzi równość między dwoma wartościami, ale te wartości są typu rzeczywistego i nawet jeśli są sobie równe, to jeśli pochodzą z różnych komputerowych procesów obliczeniowych, to ich reprezentacje są różne a wartości nie są dokładnie takie same. A zatem operacja sprawdzania równości w algorytmach nie jest dobrze określona i może prowadzić do nieskończonych obliczeń.

Uwagi szczegółowe:

Str. 5: „Algorytm” nie jest pomijany w szkolnym nauczaniu matematyki, dotychczas pojawiał się wcześniej na matematyce, niż na informatyce jako np. „algorytm pisemnego dodawania/mnożenia”, tylko że był traktowany jako czarna skrzynka z przepisami. Takich czarnych skrzynek jest wiele w nauczaniu matematyki. W.W. Sawyer pisał: „Matematyka, to pewnego rodzaju skrzynka z narzędziami.” Otóż niezupełnie, bo skrzynka z narzędziami kojarzy się z gotowymi do użytku narzędziami, a nam chodzi również o rozwój kreatywności uczniów.

Str. 32: W p. 1.5.1 jest opisany proces tworzenia algorytmu. Szkoda, że w tym opisie nie uwzględniono komputera. Proszę wziąć pod uwagę, że od tego roku wszyscy uczniowie od najmłodszych lat będą mieli zajęcia z informatyki, w tym także programowanie. Powtórzę motto tej recenzji „Dlaczego nauczanie matematyki chce się obejść bez informatyki” – to tytuł mojego wystąpienia na konferencji dydaktyków matematyki w UP, we wrześniu 2017.

Str. 46: „Organigram” to nic innego jak schemat blokowy, znany na długo przed publikacjami Z. Krygowskiej. Dobrze jest o tym wspomnieć uczniom, bo ze schematami blokowymi, pod taką nazwą, spotykają się na informatyce.

Str. 118: Algorytm powinien być poprzedzony specyfikacją problemu, który rozwiązuje; a tutaj jest na końcu wyliczenia.

Algorytmizacja. Autorka nie podaje formalnej definicji tego pojęcia, ale powołuje się na Z. Mosznera (2004), z wypowiedzi którego wynika, że algorytmizacja w matematyce obejmuje: stosowanie algorytmu, ocenianie poprawności jego zastosowania, jak i tworzenie algorytmu. Niewiele w tym określeniu jednak mowy o własnościach tworu algorytmu. Wcześniej, Z. Krygowska (1986) zaliczyła algorytmizowanie i racjonalne posługiwanie się algorytmami do fundamentalnych aktywności matematycznych, i podała później listę umiejętności związanych z algorytmizacją. Brak jest jednak bardziej szczegółowych i współczesnych opracowań na ten temat i w rezultacie nauczanie matematyki w szkołach, jak i przygotowywanie nauczycieli do tego, nie ma ani solidnej bazy teoretycznej, ani praktycznej (Autorka cytuje moją wypowiedź na ten temat na str. 12-13). W odniesieniu do konstrukcji geometrycznych, stosowanie pojęcia „algorytmizacja”, często przytaczane w tej pracy, niczego specjalnie nie wnosi, to jedynie zmiana nazwy, proponuję więc pozostać przy „opisie konstrukcji geometrycznych”, jak to było dotychczas, a uniknie się wielu niespodziewanych sytuacji, o niektórych wspominam tutaj.

Ponadto, odsunie się na bok chęć komputerowego wykonywania „algorytmów geometrycznych”, co może przysporzyć więcej kłopotów niż pożytku, o czym też wspominam w tej recenzji. „Algorytmy geometryczne” ilustrują częstą manierę nazywania algorytmem opisu działania lub instrukcję¹.

Uwagi szczegółowe

Str. 32 – 51, Algorytmizacja w podręcznikach. Tutaj Autorka nieco „naciąga” rzeczywistość nazywając algorytmami to, co autorzy podręczników nazywają schematami lub inaczej jeszcze. I ta ostatnia nazwa jest właściwa, bo nie wszystkie schematy mają wszystkie pożądane cechy algorytmów, są to po prostu wizualne schematy pewnych przepisów matematycznych.

Algorytmy geometryczne czy konstrukcje geometryczne, ponownie. To bardzo ważna wątpliwość w kontekście recenzowanej pracy. Przyszan się, że dla mnie to nowość nazywanie konstrukcji geometrycznych algorytmami, chociaż jak widzę wywodzi się jeszcze z czasów Z. Krygowskiej. Śledząc różnego rodzaju aplikacje do tworzenia konstrukcji geometrycznych, takie jak Cabri czy GeoGebra, nie spotkałem w materiałach im towarzyszących powiązania konstrukcji geometrycznych z algorytmami. Według Autorki (str. 54): „Doskonałym działem do pracy algorytmicznej w młodszych klasach jest geometria”, a dalej „Dzieci mogą wielokrotnie testować algorytm poprzez wydawanie komend dla „roboty” często z dużym entuzjazmem uczą się precyzyjnego myślenia algorytmicznego”. To jest zła droga dla rozwoju myślenia algorytmicznego. Robotem może być komputer wykonujący zaprogramowany algorytm, ale poza komputerem uczniowie nie powinni być robotami, automatycznie wykonującymi polecenia czy operacje. Zdecydowanie taka **nie jest rola algorytmów** we współczesnej nauce i dydaktyce. Algorytmy to „narzędzia” rozwiązywania problemów, kształtowane lub budowane lub dobierane w trakcie procesu rozwiązywania problemów. Algorytmika to dział informatyki o powstawaniu algorytmów w trakcie rozwiązywania problemów, to nie książka kucharska czy zestaw programów.

Algorytm a komputer. Algorytmy są pożywką dla komputerów: komputer wykonuje TYLKO programy, a KAŻDY program jest zapisem jakiegoś algorytmu. W przypadku konstrukcji geometrycznych, elementarne operacje nie mają swoich komputerowych odpowiedników, jak działania na liczbach. Tak jest w przypadku konstrukcji szkolnych, a jeszcze bardziej w przypadku geometrii obliczeniowej. Te działania to działania geometryczne, do których nie jest potrzebny komputer. Co więcej, użycie komputera może wprowadzić nieprzewidziane utrudnienia – podaję taki przykład w swojej książce *Algorytmy*, w którym to, czy przecinają się dwie proste zależy od „grubości ołówka”, a w języku komputerowym – od dokładności obliczeń.

Pojęcia **algorytmu optymalnego** (str. 26-27) jest w pracy mylnie interpretowane. To nie jest „najprostszy sposób prowadzący do rozwiązania”, bo wcześniej należałoby określić, co to jest „najprostszy sposób”. Takie pojęcie występuje w algorytmice i odnosi się do algorytmu o najmniejszej możliwej złożoności obliczeniowej, Autorka jednak nic nie pisze o złożoności obliczeniowej. Na przykład znajdowanie minimum/maksimum w ciągu n liczb za pomocą $n - 1$ porównań między elementami jest algorytmem optymalnym. Dowód nie jest całkiem trywialny, bo musi uwzględniać WSZYSTKIE możliwe sposoby obliczania minimum. W informatyce jest niewiele algorytmów optymalnych, niektóre są optymalne z dokładnością do stałego współczynnika proporcjonalności (np. algorytmy porządkowania o złożoności $O(n \log n)$). Tutaj ponownie mógłbym polecić matematykom, że o tym uczymy na informatyce!

Algorytmizacja bez komputera. Przez strony tej pracy przewija się kilka razy zadanie organizacji wycieczki szkolnej, jako przykład modelowania matematycznego za pomocą algorytmizacji. Słusznie, bardzo dobry przykład. Ale ... właśnie. Chociaż dziwi mnie poziom prac studentów z tym zadaniem, to jednak chciałbym przypomnieć, że pojawia się ono w szkole

¹ Chociaż w wielu podręcznikach do algorytmiki jako przykłady algorytmów występują przepisy kulinarne, to jednak nadal jadamy według przepisów, a nie algorytmów kulinarnych. Zapewne powodem tego są, a raczej brak własności, którymi powinny cechować się algorytmy, piszę o tym w swojej książce *Piramidy, szyszki i inne konstrukcje algorytmiczne*, Helion, 2015.

podstawowej na informatyce jako świetny przykład użycia arkusza kalkulacyjnego. W pracy Autorka podaje wyniki badań przeprowadzonych ze studentami specjalności matematyka z informatyką - nie pojmuję, dlaczego to zadanie stanowiło jakikolwiek problem dla tych studentów. Można należało najpierw zbadać ich przygotowanie do takich zadań. Widzę jednak poważniejsze uzasadnienie dla zachowania się studentów. To zadanie znakomicie nadaje się na algorytmizację i modelowanie **za pomocą komputera**, a bez komputera może sprawiać im kłopoty, i sprawiło. W arkuszy łatwo jest: uwzględnić warianty, opisać je, odwołać się do stałych, które łatwo można zmieniać, wprowadzić zmienne parametry, a przede wszystkim arkusz ułatwia symulację modelu, wprowadzanie poprawek i ponowne sprawdzanie, czyli faktycznie jest narzędziem dla całego procesu modelowania takich zadań praktycznych, jak kosztorysy, nie tylko wycieczek, ale też prywatek, imienin, pikników itp.

Krok naprzód ku myśleniu komputacyjnemu. Chociaż to pojęcie ma już ponad 10 lat, a faktycznie pojawiło się u S. Paperta w 1980 roku w pracy o kształceniu matematycznym (sic!). Autorka tylko o nim wspomina (str. 43), przytaczając w stopce niezbyt trafną definicję. A to jest krok na drodze rozwoju kompetencji stosowania *mental tools* (sposobów rozumowania, postępowania), które mają swoje źródło w informatyce, w naukach komputerowych. To cały arsenał pojęć i metod informatycznych, takich jak: abstrakcja, heurystyka, rekurencja, dekompozycja itd. Nieco ze zdziwieniem stwierdzam, że to podejście nie dotarło jeszcze na dobre do dydaktyków matematyki.

Przegląd rezultatów pracy

Rozdział 1. Algorytm, algorytmizacja

Autorka ma rację pisząc na początku, że „aktywność matematyczna jest działalnością umysłu”, a następnie wymienia za Z. Krygowską różne rodzaje tej aktywności. Nie ma wśród nich jednak „algorytmizacji”, występuje algorytm, ale raczej jako czarna skrzynka. Dalej szczegółowo uzasadnia znaczenie algorytmizacji dla kształcenia matematycznego, głównie dla aktywizacji uczniów. Ale czy w znaczeniu, by mieli co robić, czym się zająć, czy raczej zrozumieli pojęcie i potrafili wykonać związane z nimi rachunki (Autorka dzieli matematykę na pojęciową i algorytmiczną, str. 11 – nie do końca się z tym zgadzam, ale zostawmy ten wątek.) Totalne podejście do matematyki jako poletka dla algorytmizacji nie będzie chyba służyć matematyce – jestem daleki od tego jako informatyk, odradzałbym. A więc, kiedy rzeczywiście w nauczaniu matematyki miałyby pojawić się algorytmy? To temat na osobną dyskusję. Uważam, że informatyka, a algorytm jako jej narzędzie, powinna stać się elementem arsenału metod „uprawiania matematyki”, a nie tylko jej ilustrowania. Niestety pod tym względem, edukacja matematyczna z każdą kolejną podstawą programową cofa się. Nie pojawia się termin algorytm, algorytmizacja, komputer, technologia, ale wraca i utwierdza się (w najnowszej podstawie dla szkół ponadpodstawowych) posługiwanie się kalkulatorem i tablicami matematycznymi w zadaniach obliczeniowych. Autorka ma rację, że wiele z zapisów poprzedniej podstawy można realizować za pomocą pracy z algorytmami (str. 31), ale podstawa tego nie wymaga, a chodzi o to, by zmienić kształcenie matematyczne wszystkich uczniów, co więcej – zmienić sposób „uprawiania matematyki”. Nie mówię już o wykorzystaniu tego, co z matematyki uczniowie poznają na informatyce – matematycy „nie chcą tego kupić” dla swojego przedmiotu.

Na potwierdzenie, że z algorytmizacją nie jest źle, Autorka przytacza przykłady z podręczników. Niestety, uznaje za algorytmy wszystko, co służy schematycznemu wyjaśnieniu pojęcia lub metody, większość tych schematów nie ma przytaczanych wcześniej własności algorytmów, pozostaje więc tylko schematem.

Potwierdzam, co napisałem powyżej – konstrukcje geometryczne powinny pozostać konstrukcjami, a nie algorytmami geometrycznymi. Na schematach w p. 1.6.3.1 znajduje się wiele miejsc nie do końca precyzyjnych, a związanych ze sprawdzaniem równości między dwoma wielkościami rzeczywistymi (typu rzeczywistego). Inna terminologia też mnie zastanawia. Czy się różni „skonstruuj prostą” (str. 47), „zbuduj prostą” (str. 55) od narysuj prostą, jak mnie uczono. Podobnie, konstruuje się okrąg, zamiast go kreślić. Chyba uczeń ma to robić w rzeczywistości, przyborami na kartce papieru, czy nie? Najbardziej podoba mi się kreślenie III

Sposobem na str. 49! Opinia Autorki (str. 55), że „możemy przyzwyczaić uczniów do myślenia w sposób algorytmiczny, będący jednocześnie nauczaniem proinformatycznym.” nie jest specjalnie trafna w kontekście algorytmów geometrycznych, gdyż na zajęciach z informatyki nie spotkają się z potwierdzeniem takiego podejścia do konstrukcji geometrycznych. Owszem, istnieje cały dział geometrii obliczeniowej, ale zajmuje się on rozwiązywaniem rzeczywiście problemów algorytmicznych i obliczeniowych w geometrii, a nie samymi konstrukcjami.

Rozdział 2. Modelowanie matematyczne

Tytuł rozdziału nie jest zbyt trafnym sformułowaniem „Modelowanie matematyczne jako typ algorytmizacji”. Raczej powinno być „Algorytmizacja jako metoda i narzędzie modelowania”.

To bardzo ważna misja matematyki – tworzenie modeli rzeczywistych sytuacji. Można dodać modeli matematycznych, ale z tym trzeba być ostrożnym, gdyż uwzględnienie cech rzeczywistych sytuacji często wymaga odniesienia się do innych dziedzin, a wtedy model, może być wynikiem analizy sytuacji przez matematyków, ale niesie także cechy i elementy innych dziedzin. Na ogół modele są bardzo złożonymi konstrukcjami, interdyscyplinarnymi. O tych innych dziedzinach nie należy zapominać nawet wtedy, gdy tworzymy czysty model matematyczny,

Najlepszym komentarzem do powyższego jest ciąg Fibonacciego (p. 2.1.3). Autorka delikatnie nadmienia, że „nie jest on najlepszym modelem opisującym rozwój populacji królików”. Poprosiłem kiedyś uczniów, by zapytali szkolnego biologa, jak rozmnażają się króliki, ile ich będzie po 10 miesiącach (jak u Fibonacciego). Później opisali mu, jak to wymyślił Fibonacci – obśmiał ich kończąc dyskusję. Inna sprawa, że te liczby były w przyrodzie od zawsze jako pewien dyskretny opis obiektów przyrody i bez królików i tak pojawiłyby się w matematyce.

Bardzo ważnym stwierdzeniem jest, że modelowanie jest procesem. Stąd już krótka droga do konkluzji, że modelowanie matematyczne to obszar potencjalnych aktywności uczniów, zwłaszcza w odniesieniu do zagadnień z ich otoczenia, które są w stanie ich zaangażować i umotywowwać do pracy. Jeśli do tego, modelowanie połączymy z aktywnością informatyczną (komputerową), to zapewne łatwiej nam będzie przekonać uczniów do wartości i znaczenia matematyki, jak i użyteczności informatyki.

Całe szczęście, modelowanie pojawia się jawnie w podstawie programowej. Jednak już przełożenie tych zapisów w podręcznikach na konkretne aktywności w klasie pozostawia wiele do życzenia. Tutaj niezbędne jest współpraca matematyków z informatykami. Jeśli bowiem, algorytmizacja ma być narzędziem modelowania, to to narzędzie powinno być dobrze opanowane przez uczniów, a wcześniej – przez nauczycieli. Mogę mnożyć przykłady zapisów w najnowszej podstawie programowej matematyki pokazujące, że ich autorami nie kierowały rzeczywiste przykłady, które mogłyby ilustrować wykorzystanie wiedzy matematycznej i informatycznej w modelowaniu.

Współpraca matematyków z informatykami w modelowaniu jest na poziomie rozwiązywania modelu (problemu). Wcześniej, do głosu powinny dojść specjaliści od modelowanych sytuacji. I z tym może być problem w przypadku nauczycieli matematyki, jak i informatyki. Co więcej, wymagałoby to w szkole większe otwarcie się na współpracę nauczycieli różnych przedmiotów. Faktycznie jednak, takie przygotowanie (do modelowania różnorodnych sytuacji) nauczyciele powinni wyciągać ze studiów lub różnych form doskonalenia. Autorka dość dokładnie opisuje proces modelowania, jak i umiejętności niezbędne do jego prowadzenia. Niestety, wsparciem dla nauczycieli nie są tradycyjne podręczniki do matematyki. Często, modelowanie w nich sprowadza się do napisania odpowiedniego równania lub wykonania obliczeń. Jeszcze częściej zagadnienia wymagające pochylenia się przez ucznia nad modelem są umieszczone na końcu rozdziałów i zazwyczaj są „treningiem” użycia tego, co było przedmiotem w rozdziale. Potwierdzają to przykłady zamieszczone w p. 2.2.2. Przykłady z naszego krajowego podwórka to zadania rachunkowe, w najlepszym razie z treścią, nie można dopatrzyć się w nich żadnych rzeczywistych sytuacji – liczby i proste figury. Całkowitą ich przeciwnością są przykłady zagadnień przytoczone przez Autorkę wcześniej w tym punkcie. Niestety, żaden z nich nie pochodzi od krajowych autorów.

Mogę odesłać matematyków do podręczników do informatyki, do zadań maturalnych z informatyki, do zadań w książkach poświęconych informatyce i algorytmice. Tam nie ma suchych algorytmów, na ogół każdy algorytm jest poprzedzony opisem sytuacji problemowej, którą rozwiązuje. Szkoda, że Autorka nie skorzystała z tego i nie zaproponowała włączenia algorytmizacji modeli w wydaniu informatyków do nauczania matematyki, przygotowania nauczycieli. Wspomniany przykład z kosztorysem wycieczki mógłby być znakomitą ilustracją wielości aspektów modelowania i algorytmizacji, w tym także posłużenia się komputerem w pełnym procesie modelowania.

I wreszcie – p. 2.3 – relacja między modelowaniem a algorytmizacją. Jestem za przyjęciem algorytmizacji jako jednej z faz modelowania matematycznego, zamiast uznania algorytmizacji za formę modelowania. Sama Autorka uzasadnia w wielu miejscach swojej pracy, że model – tutaj będący algorytmem – to tylko fragment całego procesu polegającego na modelowaniu rzeczywistej sytuacji. To bardzo ważne, by nie uznawać samego algorytmu za model – inaczej przypomni to krytykowane w pracy podejście sprowadzające modelowanie matematyczne do zastosowania wzoru matematycznego. Jako informatyk nie jestem zwolennikiem stosowania algorytmu jako antidotum na wszystko – tutaj na brak modelowania w nauczaniu matematyki.

Rozdział 3. Kompetencje nauczycieli

Jak na pracę poświęconą dydaktyce matematyki, 6 stron na 280 to bardzo zwięzłe odniesienie się do przygotowania nauczycieli. Jeśli ustaliliśmy, czego uczyć – podstawa programowa jako standard kształcenia – to powinniśmy również określić standardy przygotowania nauczycieli, jako niezbędne przygotowanie do realizacji standardów kształcenia (podstawy). Autorka wspomina o standardach kwalifikacji zawodowych nauczycieli matematyki, opracowanych w 2007 roku na zlecenie Ministerstwa Pracy i Polityki Społecznej. Nie znam tych standardów może dlatego, że nigdy bym nie pomyślał, że trzeba ich szukać w opracowaniach tego ministerstwa. Standardy przygotowania nauczycieli matematyki powinni opracować matematycy w ścisłym związku ze standardami kształcenia (podstawą programową). Podobnie ma się ze standardami przygotowania nauczycieli w zakresie informatyki i technologii informacyjnej WSZYSTKICH NAUCZYCIELI. Autorka wymienia mój artykuł na ten temat [104] z 1999 roku. Od tego czasu opracowałem i są dostępne dwa nowe dokumenty dotyczące standardów informatycznego przygotowania nauczycieli.

Na początku tego rozdziału Autorka podaje klasyfikację umiejętności uczniów wynikających z badań PISA, a dalej wiąże poziomy umiejętności z etapami kształcenia, by wysnuć stąd wnioski, jakie powinno być przygotowanie nauczycieli. To mało! Standardy powinny sięgać szerzej i głębiej w zakres przygotowania nauczycieli, nauczyciel powinien znacznie więcej wiedzieć i umieć niż docelowo mają wiedzieć i umieć jego uczniowie. Ponadto, rolą standardów jest również wyznaczanie kierunków profesjonalnego rozwoju nauczycieli².

Część II pracy jest poświęcona przeprowadzonym przez Autorkę badaniom. Zostały one podzielone na dwie grupy – Badania wstępne (rozdz. 4) i Badania właściwe (rozdz. 5). Badania wstępne przyczyniły się do ugruntowania koncepcji dydaktycznej kształcenia nauczycieli kierunku nauczycielskiego w obszarze algorytmizacji. Ta koncepcja była przedmiotem badań właściwych.

Rozdział 4. Badania wstępne

W badaniach wstępnych wzięło udział 11 studentek II matematyki i 28 studentów pierwszego roku studiów uzupełniających. Z wyjątkiem dwóch osób, byli to studenci specjalności nauczycielskiej matematyka z informatyką. Można więc było przypuszczać, że badani studenci nie

² W efekcie realizacji takiej roli standardów przygotowania nauczycieli, są one lekturą obowiązkową na naszych studiach podyplomowych dla nauczycieli informatyki. Tym sposobem staramy się przekonać nauczycieli, że w pełni świadomie powinni „wziąć swoją edukację w swoje ręce”.

będą mieli problemów z kwestiami algorytmicznymi (informatycznymi). Co więcej, Autorka mogła śmiało wykorzystać informatyczne przygotowanie studentów i rzeczywiście połączyć w badaniach elementy matematyczne z informatycznymi przy modelowaniu sytuacji rzeczywistych. Nie zostało to jednak wykorzystane, co uważam za poważny błąd w badaniach.

Na badania wstępne złożyły się trzy etapy: (1) sprawdzenie umiejętności tworzenia modeli w postaci algorytmów i korzyści stąd płynących; (2) analiza kompetencji nauczycieli w obszarze modelowania i stosowania algorytmów; (3) eksperymentalne uczenie konstrukcji geometrycznych w postaci algorytmu w klasie gimnazjalistów.

Wróć do jednego z problemów, o którym piszę już powyżej: „Studenti mieli utworzyć SCHEMAT [moje wyróżnienie] pozwalający wyliczyć koszt wycieczki szkolnej.” A co to jest „schemat”? Wiadomo, co to jest algorytm, ale schemat³? Uwaga metodologiczna: jeśli z zamierzenia miało to być modelowanie za pomocą algorytmizacji, to uczciwiej byłoby zasugerować studentom ALGORYTM, i do tego – dopuścić posłużenie się komputerem, który jest jednym z narzędzi algorytmizacji. Zwłaszcza, że w większości ci studenci zdobywają też uprawnienia do nauczania informatyki.

Przyznam się, że szalenie mnie dziwi, że w relacji z badań nie pojawia się użycie arkusza kalkulacyjnego! Podejrzewam nawet, że był zakaz posłużenia się komputerem i jego aplikacjami! To przepraszam, na czym ma polegać algorytmizacja rzeczywistych problemów, które przecież w rzeczywistości są rozwiązywane z pomocą komputera, znakomicie nadającego się do realizacji całego procesu modelowania matematycznego.

Na stronach 94-95 podane są modele, a faktycznie algorytmy dla tego problemu. Pierwszy jest wzorem, a drugi schematem blokowym. Ten schemat jest sztucznie rozdmuchany – Autorka posłużyła się operatorami mod i div, ale funkcje powały (sufitu) i podłogi zrealizowała za pomocą instrukcji warunkowych. Pod koniec schematu jest chyba błąd – gratis nie może być liczbą ujemną jeśli jest wynikiem dzielenia całkowitego dwóch liczb naturalnych, ponadto znam muzea, w których $k = 0$.

Strony 97-112 zawierają analizę prac studenckich z pierwszego etapu, która ukazuje znaczne braki w zakresie modelowania matematycznego. Część winy „zwalilibym” na narzędzie, czyli na kartkę papieru i ołówek – w jaki sposób bowiem studenci mieliby testować rozwiązanie zapisane na kartce papieru? Model na papierze z perspektywą jego algorytmizacji może być jedynie szkicem docelowego modelu.

W drugim etapie, 28 studentów ponownie modelowało ten sam problem, ale już z wyraźnym naciskiem na algorytmizację, posłużenie się algorytmem. Zadziwiająca jest Tabela 2, żadnego odniesienia przynajmniej do pseudokodu algorytmu. Jest „próba przedstawienia na papierze formy arkusza kalkulacyjnego” Na papierze? Nie uczymy ani aplikacji, ani programowania na papierze, od tego jest komputer. Uważam za błąd metodyczny w badaniach, że studentom nie udostępniono i nie zasugerowano posłużenia się komputerem i jego aplikacjami. Właśnie arkusz powstał dla modelowania sytuacji ekonomicznych, a taką jest kosztorys wycieczki.

Niestety (str. 114), jak można było przewidzieć, „przedstawienie modelu w postaci schematu blokowego nie poprawiło precyzji myślenia o związkach, czy też nie wpłynęło na sposób matematyzacji problemu.”⁴ W podsumowaniu Autorka stwierdza, że połowa zaprezentowanych modeli nie działa prawidłowo, a skąd wiadomo, że druga połowa modeli, wszystkie zaprezen-

³ W obszarze matematyki, jak również informatyki obowiązuje precyzyjny język sformułowań problemów i prowadzenia dyskusji. Poza mało precyzyjnym schematem pojawia się w pracy również „szacowanie” kosztów, które faktycznie jest obliczaniem, A przy okazji, warto zwracać uwagę (w pracy także, ale również w pracach studentów), że jest „liczba” klas, autokarów a nie ilość. Zwykle przytaczam przy tej okazji: jest ilość cukru, ale liczba kostek cukru.

⁴ Str. 115: Gdzie w modelu planu wycieczki miałyby pojawić się pętla (iteracja)? A co to jest pętla zaporowa? Czy chodzi o pętle w schemacie modelowania, jak na str. 119? Takiej pętli na ogół nie umieszcza się w schemacie algorytmu czy w arkuszu, to krok w modelowaniu, a nie w modelu.

owane na papierze, działa poprawnie? Jestem pewien, że posłużenie się arkuszem kalkulacyjnym umożliwiłoby studentom opracowanie funkcjonujących modeli, być może z jakimiś wadami odnośnie decyzji. Str. 118: algorytm powinien być poprzedzony specyfikacją problemu, który rozwiązuje; a tutaj specyfikacja jest na końcu wyliczenia.

Wstępne badanie nr 3 polegało na rozwiązaniu dwóch zadań i wypełnieniu ankiety. Zdania raczej obliczeniowe, związane z proporcjami i procentami, nie wymagające specjalnej wiedzy z modelowania matematycznego. Natomiast ankieta odnosiła się do „świadomości” studentów związanej z modelowaniem. Pytania dotyczą raczej meta wiedzy. Można umieć rozwiązać zadanie, nieco trudniej jest opisać sposób rozwiązania, ale znacznie trudniej jest określić, jakimi kompetencjami należało się wykazać – to ostatnie to meta wiedza o swojej wiedzy i kompetencjach⁵. Autorka stwierdza, że chciała się dowiedzieć, na ile studenci dostrzegają w rozwiązywaniu zadań elementy modelowania matematycznego. Chciała rozpoznać u studentów zakres wiedzy na temat modelowania matematycznego. Ale przecież to było zdane na niepowodzenie, bo jest świadoma (str. 121), że modelowanie nie jest przedmiotem studiów matematycznych w Polsce. Zapewne większość studentów intuicyjnie jest w stanie podać rozwiązania dwóch zadań ze str. 122, ale wątpię, czy poradzą sobie właściwie z pytaniami ze str. 123. Skąd mieliby wiedzieć, że modelowanie jest procesem, być może z zajęć z informatyki, ale do tych nie ma odwołania w opisywanych badaniach. Inna kwestia, to postać zadań, która nie sugerowała podejścia z modelowania matematycznego. Autorka narzeka, że studenci skupili się na głównie obliczeniach, ale przecież w Zad. 2 wyraźnie jest mowa „Uzupełnij ... obliczając” i proste obliczenia wystarczyły do rozwiązania tego zadania⁶. W konkluzji badania nr 3 Autorka stwierdza fakt oczywisty „braki wiedzy z zakresu modelowania matematycznego u studentów matematyki”, przecież nie mieli gdzie się tego nauczyć!

Wstępne badanie nr 4 tylko potwierdziło wcześniejsze obserwacje dotyczące znajomości i stosowania modelowania matematycznego przez studentów matematyki z informatyką, przyszłych nauczycieli. Nie wróży to dobrze ich przyszłej pracy z uczniami nad rozwiązywaniem rzeczywistych problemów i posługiwaniu się przy tym modelowaniem, algorytmami i algorytmizacją.

Wstępne badanie nr 5 dotyczyło umiejętności algorytmizowania zależności matematycznych. I kolejne dla mnie zaskoczenie, że studenci matematyki z informatyką mają kłopot z równaniem (nierównością) kwadratowym, które jest przedmiotem zajęć w szkole. Zapomnieli od tego czasu, ale przecież studiują także informatykę. Zapewne nie rozwiązywali tego zadania na papierze, tylko pisali odpowiedni program. Tutaj jednak Autorka nie skorzystała z tych ich umiejętności informatycznych.

Wstępne badanie nr 6 dotyczyło algorytmizacji konstrukcji geometrycznej. Jako informatyka budzi mój sprzeciw, że w tym badaniu uczniowie pełnią role robotów. Takie podejście dydaktyczne kłóci się z dzisiejszym konstruktywistycznym i konstrukcjonistycznym podejściem do kształcenia (Piaget, Papert), w którym to uczeń jest budowniczym swoich umiejętności i wiedzy, a nie odtwórcą (robotem), programowanym przez nauczyciela jako robot. To podejście jest właściwe w nauce programowania, gdy uczniowie odgrywają role robotów, ale już S. Papert pisał (1980) – parafrazuję: „Można by sadzić, że komputer (algorytm) jest wykorzystywany do programowania dziecka. W mojej wizji, to dziecko programuje komputer...” Dobrze, jeśli od początku do końca robot wykonuje czynności (algorytm) poprawnie. A co jeśli się pomyli? Uczeń powinien umieć znaleźć błąd i umieć go poprawić. Algorytmy⁷, jak w ćwiczeniach

⁵ Jest takie powiedzenie, że gdyby stonogę zapytać, w jaki sposób uruchamia kolejne nogi, to chcąc uzmysłowić sobie to i na to odpowiedzieć, stanęłaby w miejscu i nie ruszyła się dalej.

⁶ Warto przytoczyć tutaj słowa R.W. Hemminga z 1959 roku, gdy obliczenia przebiegały jeszcze na papierze: *The purpose of computing is insight not numer* (pl. Celem obliczeń jest zrozumienie, nie wynik).

⁷ W tekście nie znalazłem wyjaśnienia, że wielkie litery w Liście umiejętności (str. 148) to nazwy parametrów, formalne, a można pod nie podstawiać wartości aktualne – tutaj ponownie kłania się informatyka.

1 i 2 (str. 148-149) są odpowiednie dla komputera, ale uczniowie mieli posługiwać się linijką i cyrklem.

W podsumowaniu badań wstępnych (p. 4.4) Autorka zebrała wyniki badań, które wskazują na potrzebę „prowadzenia zajęć ze studentami z zakresu nauczania z wykorzystaniem podejścia algorytmicznego.” Nie przeczę, ale dodam że bardzo ważne jest zintegrowanie takich zajęć z przygotowaniem informatycznym. Algorytmy i modelowanie z ich pomocą są przedmiotem kształcenia informatycznego od pierwszych lat w szkole; algorytm to podstawowe pojęcie informatyczne. Wiele z wymienionych wniosków brzmiałoby inaczej, gdyby Autorka wykorzystwała przygotowanie informatyczne studentów, komputery i ich aplikacje.

Rozdział 5. Badania właściwe

Badania służyły weryfikacji koncepcji kształcenia studentów kierunków nauczycielskich, dotyczącej nauczania matematyki z wykorzystaniem algorytmizacji, w ścisłym związku z modelowaniem matematycznym. Autorka posłużyła się w tych badaniach niemal takimi samymi przykładami zadań jak w badaniach wstępnych, rozbudowując je o ankiety wypełniane przez studentów i dyskusje między nimi. Badania objęły 3 spotkania po 90 minut i objęły 16 studentów kończących magisterskie studia z matematyki o specjalizacji nauczycielskiej matematyka z informatyką. Autorka podaje, że „Studenci ci na zajęciach z informatyki mieli poruszane zagadnienie algorytmów.” To bardzo nisko postawiona poprzeczka oczekiwanych umiejętności informatycznych badanych studentów, przecież ci studenci w roku badań uzyskali uprawnienia do nauczania informatyki na wszystkich poziomach edukacji! Powtórzę się, dlaczego w prezentowanych badaniach nie ma żadnych odniesień do tego ich przygotowania? Odsyłam do motta tej recenzji.

Zajęcia I były poświęcone wprowadzeniu dydaktycznych aspektów modelowania matematycznego. Jako zad. 1 studenci mieli utworzyć, teraz już algorytm a nie schemat, wyznaczający koszt udziału w wycieczce. Algorytm powinien być być „czytelny i zrozumiały” – informatyka nie zna i nie operuje takimi cechami algorytmów. Ponadto, mieli wypełnić ankietę o swoich wrażeniach z realizacji tego zadania. W zadaniu 2 wybierali z listy umiejętności potrzebne do rozwiązania zad. 1. Wśród nich znalazło się „stosowanie strategii heurystycznych” – czy studenci wiedzieli, co to jest heurystyka? To zadanie kończyło się dyskusją dotyczącą umiejętności. Zadanie 3 to bardzo praktyczne pytanie, o algorytm wyznaczający ilość wody wypijanej tygodniowo przez rodzinę, sformułowane bardzo ogólnie, na które studenci mieli tylko 15 minut. Celem zapewne było pozostawienie studentów z wątpliwościami – ale tylko przez 15 minut – czy do wypijanej wody można zaliczyć wodę w pożywieniach, jak zupy, kisiele, budynie, kompoty, czy w innych napojach, jak Coke, lód do Coke itp. A co z wodą pitą poza domem? Rozwiązanie wzorcowe na str. 175-176 usuwają na bok te wątpliwości – nie uwzględnia się w nich tak szczegółowych dociekań, chociaż Autorka dopuszcza różną interpretację problemu i niektórzy studenci z tego skorzystali bezwiednie w swoich rozwiązaniach w wyniku analizy sytuacji problemowej.

Zajęcia II. Rozpoczęły się przypomnieniem dwóch pierwszych zadań z pierwszych zajęć. Zadanie 4 dotyczyło uzupełnienia schematów blokowych; zadanie 5 – napisania algorytmu rozwiązywania równania kwadratowego, następnie słuchacze obejrzeli prezentację dotyczącą nauczania matematyki z wykorzystaniem algorytmizacji, i na końcu tych zajęć (zad. 6) mieli zbudować algorytm rozpoznający wzajemne położenie dwóch okręgów.

Zajęcia III. Wspólne tworzenie algorytmu wyznaczającego równanie symetralnej odcinka (zad. 7); dwa zadania do samodzielnego wykonania: algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowych (zad. 8) i algorytm dla malarza Kowalskiego na ilość potrzebnej farby (zad. 9). Zajęcia kończyła dyskusja i podsumowanie badań.

W sumie na 8 zadań, tylko 3 z nich dotyczyły modelowania sytuacji praktycznych (1, 3 i 9) i posłużenia się w tym algorytmizacją, co było głównym celem badań.

Celem badań było (str. 164) „rozpoznanie w jakim stopniu nauczyciele matematyki są w stanie posiadać kompetencje związane z algorytmizacją (modelowaniem matematycznym) przy

niewielkim nakładzie czasu poświęconym temu zagadnieniu w oparciu o zaproponowaną koncepcję." Jest mowa o nauczycielach matematyki, ale przecież to będą także nauczyciele informatyki (takie dostają uprawnienia). Dlaczego w prezentowanych badaniach jawnie nie korzysta się z tego ich przygotowania, badając dodatkowo stopień wykorzystania ich przygotowania informatycznego w nauczaniu matematyki, zwłaszcza z wykorzystaniem algorytmizacji. Większość zaproponowanych zadań w badaniach występuje w kształceniu informatycznym. Dlatego większość zagadnień występujących w celach dydaktycznych i badawczych (p. 5.2) powinna być znana studentom uczestniczącym w badaniach. Niestety w wynikach badań nie znajdują żadnej wzmianki o korelacji przygotowania matematycznego z przygotowaniem informatycznym studentów, lub braku takiej korelacji, co należałoby uznać za niedociągnięcie w kształceniu przyszłych nauczycieli dwóch przedmiotów.

W punkcie 5.3 Autorka zamieściła wzorcowe rozwiązania zadań z tego etapu badań, zastrzegając, i słusznie, że są to jedne z wielu możliwych rozwiązań. Z tego też względu te rozwiązania wzorcowe mają ograniczone zastosowanie w ocenie rozwiązań podanych przez studentów.

Punkcie 5.4 jest poświęcony analizie koncepcji dydaktycznej. To najobszerniejszy fragment pracy i najważniejszy dla oceny i wniosków z przeprowadzonych badań właściwych. Autorka wymienia wady i błędy w rozwiązaniach, jak i właściwe decyzje. Ponieważ większość zadań studenci rozwiązywali zapewne w ramach zajęć informatycznych pozostaje wątpliwość, jakie jest właściwe źródło ich umiejętności lub ich braku, niewłaściwego podejścia do algorytmizacji zadań o charakterze matematycznym. To najpoważniejsza wątpliwość związana z oceną badań koncepcji dydaktycznej.

Odniosę się szczegółowo tylko do podsumowania analizy zad. 1 (p. 5.4.1.5), broniąc nieco studentów. Studenci wykazali braki umiejętności w zakresie modelowania matematycznego i posiadają ograniczone kompetencje z tego zakresu. Ale wcześniej Autorka pisze o braku zajęć z tego zakresu na studiach, skąd więc mają wiedzieć, że modelowanie to cykliczny proces tworzenia, weryfikacji i modyfikacji modelu? Nie wiedzą, że trzeba zapisać wszystkie założenie, chociaż zapewne poprzedzają algorytm specyfikacją – to ostatnie powinni byli poznać na zajęciach informatycznych. Na ogół zadowalają się pierwszym rozwiązaniem – mieli bowiem tylko 30 minut na rozwiązanie, a po drugie – testowanie rozwiązania (modelu) na papierze to duże przedsięwzięcie „logistyczne” ale jako informatycy mogliby to zrobić na komputerze, gdyby tylko mieli taką możliwość udostępnioną w badaniach. Zarzut, że modele były nieprecyzyjne należy chyba osłabić i wziąć pod uwagę, że w przypadku problemów „nie matematycznych” (matematyczne, to równania i nierówności kwadratowe), ilu studentów tyle możliwych rozwiązań. Tak jest na ogół przy modelowaniu i rozwiązywaniu rzeczywistych problemów. I pada ocena: „**nie łączą wiedzy informatycznej z wiedzą matematyczną**”. Ale tym ostatnim nie można obarczyć tylko studentów, piszę o tym w wielu miejscach. Wiedzy informatycznej nie da się przelać tylko na kartki, a nie udostępniono studentom żadnych narzędzi informatycznych. Poza wymienieniem różnych postaci algorytmów (str. 20), nigdzie w pracy i w zadaniach, także we wzorcowych rozwiązaniach, nie pojawia się algorytm reprezentowany w pseudojęzyku lub w języku programowania. Wśród umiejętności potrzebnych do wykonania zad. 1 (str. 159) również nie ma żadnych odniesień do kompetencji informatycznych.

Niepokoją wyniki uzyskane przez studentów w zad. 5 i 8, klasycznego równania kwadratowego i nierówności kwadratowej. Str. 230: „Analiza prac wykazała, że stworzenie algorytmu rozwiązującego równanie ... nie jest zadaniem prostym dla przyszłych nauczycieli matematyki. Tylko jedna praca nie zawiera żadnych błędów.” Przepraszam, to w jaki sposób te osoby ukończyły szkołę średnią i przeszły przez 4 lata studiów matematyczno-informatycznych? Niewątpliwie algorytmizacja i modelowania mogły „usztynić” myślenie niektórych studentów, ale popełniono wiele niewymuszonych błędów przy rozwiązywaniu tego równania. W tym zadaniu jest pewien kruczek, wymuszający szerszą analizę rozwiązań – mowa jest o równaniu, a nie o równaniu kwadratowym. Zapewne student widząc równanie kwadratowe rozwiązuje je jako równanie kwadratowe nie patrząc na szczególne przypadki. Szkoda, że tego nie zbadał, nie zauważyłem. Przy rozwiązywaniu nierówności w zad. 8 widać rezultaty zajmowania

się równaniem, chociaż wyraźnie jest mowa o nierówności kwadratowej, więc uwzględnianie wartości współczynnika a jest błędem. Ponownie martwi, że „wśród 16 algorytmów żaden nie jest pozbawiony niedociągnięć.”

Wnioski i ocena pracy

Celem pracy była weryfikacja koncepcji dotyczącej przygotowania przyszłych nauczycieli matematyki w zakresie problematyki budowania algorytmów i wykorzystania algorytmizacji w modelowaniu matematycznym. Zdaniem Autorki, uzyskane wyniki potwierdzają, że zapropo-
nowana koncepcja spełniła swoje założenia (str. 263). Co więcej, „jej realizacja nie wymaga żadnych specjalnych nakładów”, z łatwością może być włączona w istniejące siatki kształcenia.”

Gdzie w taki razie podziały się te wszystkie wnioski o błędnych w rozwiązaniach, wręcz braku rozwiązań poprawnych, braku przygotowania do modelowania matematycznego, braków z elementarnej matematyki (równania kwadratowe) i algorytmiki? Dalej na tej samej stronie Autorka wylicza więcej braków u studentów niż dobrych stron i sugeruje, jak te braki nadrobić i co z tych badań wynieśli studenci. Ale to było tylko 3 x 90 minut zajęć kształtujących te nowe kompetencje.

Do tej listy braków w koncepcji zaliczyłem wielokrotnie brak informatycznego odniesienia do strony algorytmicznej rozważań. Autorka zauważa, że studenci nie łączą wiedzy matematycznej z informatyczną, co wydaje się być nie tylko ich błędem, są przecież studentami na specjalizacji matematyka z informatyką, niejako z nazwy integrującej te dwie dziedziny. Mój główny zarzut do badań dotyczy nie uwzględnienie *explicite* tych powiązań. Zapewne wiele na tym straciła, zarówno realizacja zadań, jak i obrona i uzasadnienie koncepcji.

W kontaktach z dydaktykami matematykami odnoszę często wrażenie, że „algorytm” jest dla nich głównie hasłem, za którym nie stoją konkretne kompetencje matematyczne. Tak jest w przypadku zapisów w podstawie programowej. A w rozmowie z jej autorami, na zażalenie, że nie ma algorytmu Euklidesa, chociaż jest równość o ilorazie i reszcie, czyli pół kroku przed wyprowadzeniem i uzasadnieniem algorytmu Euklidesa usłyszałem, to wy zrobicie to na informatyce. Rozumiem tę wyższość matematyki nad informatyką, która każe na przykład proponować w szkole branżowej (zawodowej) zaznajomienie uczniów z dowodem, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, skądinąd przepiękny dowód tegoż samego Euklidesa. Teraz my informatycy mamy inny problem z matematykami – funkcja w programach komputerowych pojawia się już w IV klasie szkoły podstawowej a na matematyce – dopiero w liceum, bo jak usłyszałem „szkolna definicja (jako przyporządkowanie) jest obarczona szeregiem wad, a ściśle zdefiniowanie przyporządkowania wymaga wprowadzenie aksjomatyki”. Gdzieś musi być miejsce, by przerwać to zakłęte koło poprawności matematycznej i połączyć siły ku lepszemu kształceniu matematycznemu. My w informatyce poradzimy sobie – wprowadzamy potrzebną nam matematykę, gdy pojawia się taka konieczność. Ale możemy spiąć siły w kształceniu matematycznym.

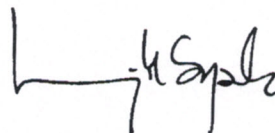
Podsumowując, mam nadal obawy, które częściowo potwierdza ta praca, że matematycy, wbrew poglądom Z. Krygowskiej, za algorytm przyjmują przepis do wykonania pewnych czynności rachunkowych czy konstrukcyjnych, jak „czarną skrzynkę”, zaś uczniów traktują jak robotów do wykonywania tych algorytmów. Powtórzę, takie podejście dydaktyczne kłóci się z dzisiejszym konstruktywistycznym i konstrukcjonistycznym podejściem do kształcenia (Piaget, Papert), w którym to uczeń jest budowniczym swoich umiejętności i wiedzy, a nie odtwórcą (robotem), programowanym przez nauczyciela, komputer, robota, czy nawet algorytm.

Odnosząc się bezpośrednio do tej pracy, Autorce proponuję uwzględnienie w dalszych badaniach uwag dotyczących algorytmizacji w nauczaniu matematyki i modelowania matematycznego na bazie pełnego wykorzystania informatyki i algorytmiki, zwłaszcza w zakresie kompetencji, jakie w tym zakresie powinni posiadać przyszli nauczyciele matematyki. Ponadto, dalsze badania powinny uwzględniać bardziej różnorodną i reprezentatywną grupę nauczycieli.

Uwagi krytyczne, które sformułowałem odnoszą się głównie do sfery informatycznej pracy i badań. Autorka działała w nieco innych warunkach – grupy nauczycieli przygotowanych według obowiązującego programu studiów. Moje i Autorki oczekiwania nie tak łatwo spełnić, a więc badania musiały dotyczyć istniejącej sytuacji. Zostały one oparte na ugruntowanym już przeświadczeniu (od Z. Krygowskiej, 1977) o roli algorytmów w nauczaniu matematyki, chociaż ten pogląd musi obecnie uwzględniać aktualne miejsce informatyki, i algorytmów w szczególności, w kształceniu matematycznym, które powinno przyjąć „partnerski” stosunek do kompetencji informatycznych.

Pani **Anna Pyzara** wykazała się w pracy znajomością podstaw informatyki w zakresie algorytmiki oraz znajomością warsztatu badacza w dydaktyce matematyki. Przeprowadziła rozległe badania, chociaż na niewielkiej populacji nauczycieli, wstępne i zasadnicze. Szczegółowo przeanalizowała wyniki badań, które w głównym zarysie zweryfikowały koncepcję dotyczącą przygotowania przyszłych nauczycieli matematyki w zakresie problematyki budowania algorytmów i wykorzystania algorytmizacji w modelowaniu matematycznym. Badania wskazały również na braki w kształceniu przyszłych nauczycieli o uprawnieniach do nauczania matematyki informatyki i można mieć nadzieje, że te wnioski zostaną wykorzystane w przemodelowaniu studiów nauczycielskich na Wydziale, na którym broni pracy.

Biorąc pod uwagę wszystkie aspekty recenzowanej pracy w konkluzji stwierdzam, że rozprawa doktorska Pani **mgr Anny Pyzary** pt. *Algorytmizacja jako aktywność i umiejętność matematyczna* spełnia wymogi Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym i wnoszę o dopuszczenie Autorki do dalszego toku przewodu doktorskiego.



Prof. dr hab. Maciej M. Sysło